



2011年文系第2問

2 不等式

$$\log_x y \leq \log_y x$$

の表す領域を図示せよ。

真数と底の条件より, $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$

底の変換公式より, 不等式は,

$$\frac{\log y}{\log x} \leq \frac{\log x}{\log y} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる.

(i) $0 < x < 1, 0 < y < 1$ のとき.①の両辺に $(\log x) \cdot (\log y) > 0$ をかけて.

$$(\log y)^2 \leq (\log x)^2$$

 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ より, $\log y \geq \log x$

よって, $y \geq x$

(ii) $0 < x < 1, y > 1$ のとき.①の両辺に $(\log x)(\log y) < 0$ をかけて.

$$(\log y)^2 \geq (\log x)^2$$

$$\therefore (\log y + \log x)(\log y - \log x) \geq 0$$

 $0 < x < 1, y > 1$ より, $\log y - \log x > 0$

$$\therefore \log y + \log x \geq 0$$

$$\therefore \log xy \geq 0$$

$$\therefore xy \geq 1$$

$$\therefore y \geq \frac{1}{x}$$

(iii) $x > 1, 0 < y < 1$ のとき.(ii)と同様にして, $y \leq \frac{1}{x}$ (iv) $x > 1, y > 1$ のとき. $(\log x)(\log y) > 0$ より, (i)と同様にして, $y \leq x$

(i)~(iv)より, 求める領域は, 右上の図の斜線部分

ただし, 境界線は $y = x$ 上と $y = \frac{1}{x}$ 上のみ含み, $(0, 0)$ と $(1, 1)$ は含まない.