0002247092577999

徳島大学

2016年 医（保健）・工学部 第1問

$\boxed{1}$ 曲線 $y=x^3$ $(x>0)$ を C とする．C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸の交点を Q とする．

(1) 法線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 2点 P，Q 間の距離を t を用いて表せ．

(3) 点 P が曲線 C 上を動くとき，2点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ．

(1) $y'=3x^2$ より点 P における接線の傾きは $3t^2$，法線の傾きは $-\frac{1}{3t^2}$

$\therefore\ \ell:\ y=-\frac{1}{3t^2}(x-t)+t^3$

$\therefore\ \underline{\ell:\ y=-\frac{1}{3t^2}x+t^3+\frac{1}{3t}}$ //

(2) (1) より，$\mathrm{Q}\left(0,\ t^3+\frac{1}{3t}\right)$

$\therefore\ PQ^2=(t-0)^2+\left\{t^3-\left(t^3+\frac{1}{3t}\right)\right\}^2$

$=t^2+\frac{1}{9t^2}\quad\cdots(*)$

$=\frac{9t^4+1}{9t^2}$

$t>0$ であるから，$\underline{PQ=\frac{\sqrt{9t^4+1}}{3t}}$ //

(3) $(*)$ と $t^2>0$，$\frac{1}{9t^2}>0$ より

$PQ^2=t^2+\frac{1}{9t^2}$

$\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{9t^2}}$ （相加・相乗平均の関係）

$=\frac{2}{3}$

等号成立は，$t^2=\frac{1}{9t^2}$ すなわち，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

以上より，PQ の$\underline{最小値は\ \frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(t=\frac{\sqrt{3}}{3}\ のとき\right)}$ //