旭川医科大学

2015年 医学部 第4問　　1枚目／3枚

数理 石井K

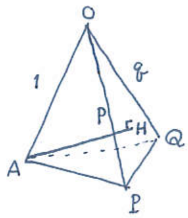
4 四面体OAPQにおいて，$\angle AOP = \angle AOQ = \angle POQ = 60°$，$OA = 1$，$OP = p$，$OQ = q$とし，頂点Aから平面OPQに下ろした垂線をAHとする．ただし，$p \leqq q$とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$を$p$，$q$を用いて表せ．

(2) AHの長さを求めよ．

(3) $p+q=3$，および△APQの面積が1のとき，以下の値を求めよ．

　(1) pq　　(2) p　　(3) 四面体OAPQの体積



(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OA}|^2$

$= p\cdot q\cdot\cos 60° - p\cdot 1\cdot\cos 60° - 1\cdot q\cdot\cos 60° + 1$

$= \underline{\frac{1}{2}pq - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q + 1}$ //

(2) 点Hは平面OPQ上にあるので，$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$ (s, tは実数)と表される．

$\therefore \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$

AH ⊥ 平面OPQ　$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OP} = 0$ かつ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OQ} = 0$

$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} + s|\overrightarrow{OP}|^2 + t\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$= -\frac{1}{2}p + sp^2 + \frac{1}{2}pqt$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ} + s\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} + t|\overrightarrow{OQ}|^2$

$= -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}spq + tq^2$

$$\therefore \begin{cases} sp^2 + \frac{1}{2}pqt = \frac{1}{2}p & \cdots① \\ \frac{1}{2}spq + tq^2 = \frac{1}{2}q & \cdots② \end{cases}$$

①×2q − ②×p より，

$\frac{3}{2}sp^2q = \frac{1}{2}pq$　$\therefore \frac{1}{2}pq(3sp-1) = 0$　$p>0$，$q>0$ より，$s = \frac{1}{3p}$

①×q − ②×2p より，

$-\frac{3}{2}pq^2t = -\frac{1}{2}pq$　$\therefore \frac{1}{2}pq(3qt-1) = 0$　$p>0$，$q>0$ より，$t = \frac{1}{3q}$

0001977182208999

旭川医科大学

2015年 医学部 第4問　　2枚目／3枚

数理 石井K

4 四面体OAPQにおいて，$\angle AOP=\angle AOQ=\angle POQ=60^\circ$，$OA=1$，$OP=p$，$OQ=q$とし，頂点Aから平面OPQに下ろした垂線をAHとする．ただし，$p\leqq q$とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$を$p$，$q$を用いて表せ．

(2) AHの長さを求めよ．

(3) $p+q=3$，および$\triangle APQ$の面積が1のとき，以下の値を求めよ．

(1) pq　(2) p　(3) 四面体OAPQの体積

(2)のつづき．

$$\therefore \overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3p}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3q}\overrightarrow{OQ}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AH}|^2=1+\frac{1}{9p^2}\cdot p^2+\frac{1}{9q^2}\cdot q^2-\frac{2}{3p}\cdot1\cdot p\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3q}\cdot1\cdot q\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{9pq}\cdot p\cdot q\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AH}|=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ より $|\overrightarrow{AP}|^2=p^2+1-2p\cdot1\cdot\frac{1}{2}=p^2-p+1$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$ より． $|\overrightarrow{AQ}|^2=q^2+1-2q\cdot1\cdot\frac{1}{2}=q^2-q+1$

これと(1)より．

$$\triangle APQ=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AQ}|^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-p+1)(q^2-q+1)-\left(\frac{1}{2}pq-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q+1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}p^2q^2+\frac{3}{4}(p+q)^2-\frac{1}{2}pq(p+q)-2pq}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{3p^2q^2-14pq+27}$$

$\triangle APQ=1$ より． $\sqrt{3p^2q^2-14pq+27}=4$

$$\therefore 3(pq)^2-14pq+11=0$$

$(3pq-11)(pq-1)=0$　$\therefore pq=\frac{11}{3},\ 1$

相加・相乗平均の関係より． $p+q\geqq2\sqrt{pq}$　$\therefore 3\geqq2\sqrt{pq}$　$\therefore pq\leqq\frac{9}{4}$　$\therefore \underline{pq=1}$ //

2015年 医学部 第4問　　3枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 四面体OAPQにおいて，$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{AOQ}=\angle\mathrm{POQ}=60^\circ$，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$とし，頂点Aから平面OPQに下ろした垂線をAHとする．ただし，$p\leqq q$とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$p$，$q$を用いて表せ．

(2) AHの長さを求めよ．

(3) $p+q=3$，および△APQの面積が1のとき，以下の値を求めよ．

(1) pq　　(2) p　　(3) 四面体OAPQの体積

(3)のつづき．

$p+q=3$，$pq=1$ より．p．q は．

$x^2-3x+1=0$ の解である．

よって．$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　　$\therefore p\leqq q$ より．$\underline{p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ //

$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot pq\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ より．

$V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$ //