0001459540458999

倉敷芸術科学大学

2013年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n{}^2-3a_n+5$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．このとき，どのような自然数 n に対しても，a_n-2 は5で割り切れることを，数学的帰納法を使って証明せよ．

数学的帰納法により示す.

(i) $n=1$ のとき.

$a_1-2=0$　∴ 5で割り切れるので成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると.

a_k-2 は 5 で割り切れるので. $a_k-2=5l$ (l : 整数) とおく.

∴ $a_k=5l+2$ と表せる.

このとき. $a_{k+1}=2a_k^2-3a_k+5$ より

$$\begin{aligned} a_{k+1}-2 &= 2a_k^2-3a_k+3 \\ &= 2(5l+2)^2-3(5l+2)+3 \\ &= 2(25l^2+20l+4)-15l-3 \\ &= 50l^2+25l+5 \\ &= 5(10l^2+5l+1) \end{aligned}$$

∴ $a_{k+1}-2$ も 5 で割り切れる

(i), (ii) より. すべての自然数 n に対して

a_n-2 は 5 で割り切れる ▨