2013年 薬学部 第3問

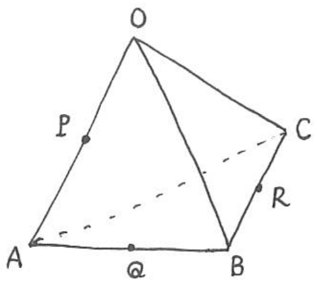
数理 石井K

$\boxed{3}$ 1辺の長さが1の正四面体OABCがあり，その辺OA，AB，BCの中点をそれぞれP，Q，Rとし，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC}$とおく．

(1) $\overrightarrow{PR}$を$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{PR}|$を求めよ．

(3) $\triangle PQR$の面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}$

$\therefore\ \overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$=\underline{-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}}$ //

(2) $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\frac{1}{2}$ である．

(1)より．

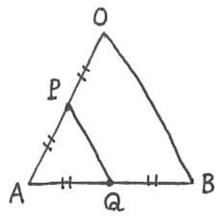
$|\overrightarrow{PR}|^2=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)$

$=\frac{1}{4}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$

$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2+|\overrightarrow{c}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\right)$

$=\frac{1}{2}$

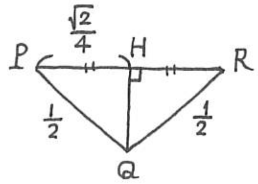
$\therefore\ \underline{|\overrightarrow{PR}|=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ //



(3) 右の図より，$PQ=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}$ 同様に $QR=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \triangle PQR$は二等辺三角形より，

PQ=QRの



点QからPRに垂線QHを下ろすと $PH=\frac{\sqrt{2}}{4}$

三平方の定理より，$QH=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{PR}|\cdot|\overrightarrow{QH}|$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$ $=\underline{\frac{1}{8}}$ //