2013年 理系 第4問　　1枚目/2枚

4 行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 実数 x, y, u, v が，$xA+yE=uA+vE$ を満たすならば，$x=u$, $y=v$ であることを示せ．

(2) $A=a_1A+b_1E$, $A^2=a_2A+b_2E$ となる実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ．

(3) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，$A^n=a_nA+b_nE$ となる実数 a_n, b_n を n を用いて表せ．

(4) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，実数 c_n, d_n が

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^n=c_nA+d_nE$$

を満たしているとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$ を求めよ．

(1) $xA+yE=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}x+y & \frac{1}{2}x\\ \frac{1}{2}x & \frac{7}{2}x+y\end{pmatrix}$, $uA+vE=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}u+v & \frac{1}{2}u\\ \frac{1}{2}u & \frac{7}{2}u+v\end{pmatrix}$

よって，各成分を比べて，$\frac{7}{2}x+y=\frac{7}{2}u+v$ …① かつ $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}u$ …②

②より，$x=u$　これを①に代入して，$y=v$

以上より，$x=u$, $y=v$ となる ▨

(2) $xA+yE=uA+vE$ において，$x=1$, $y=0$, $u=a_1$, $v=b_1$ を代入して，

(1)の結果より，$\underline{a_1=1,\ b_1=0}$ //

ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2-7A+12E=O$　∴ $A^2=7A-12E$

∴ $7A-12E=a_2A+b_2E$　(1)より，$\underline{a_2=7,\ b_2=-12}$ //

(3) $A^{n+1}=A\cdot A^n$

$=A(a_nA+b_nE)$

$=a_n(7A-12E)+b_nA$

$=(7a_n+b_n)A-12a_nE$

∴ $\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+b_n & \cdots③\\ b_{n+1}=-12a_n & \cdots④\end{cases}$

③,④より，$a_{n+2}=7a_{n+1}-12a_n$

∴ $a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$ …⑤

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$ …⑥

⑤より，$a_{n+1}-3a_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$ …⑦

⑥より，$a_{n+1}-4a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$ …⑧

⑦−⑧より　$a_n=4^n-3^n$

このとき ③より

$b_n=a_{n+1}-7a_n$

$=4^{n+1}-3^{n+1}-7(4^n-3^n)$

$=-3\cdot4^n+4\cdot3^n$

以上より

$\underline{a_n=4^n-3^n,\ b_n=4\cdot3^n-3\cdot4^n}$ //

2013年 理系 第4問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 実数 x, y, u, v が，$xA+yE=uA+vE$ を満たすならば，$x=u$, $y=v$ であることを示せ．

(2) $A=a_1A+b_1E$, $A^2=a_2A+b_2E$ となる実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ．

(3) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，$A^n=a_nA+b_nE$ となる実数 a_n, b_n を n を用いて表せ．

(4) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，実数 c_n, d_n が

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^n=c_nA+d_nE$$

を満たしているとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$ を求めよ．

(4) $$A+A^2+A^3+\cdots+A^n=\sum_{k=1}^{n}(a_kA+b_kE)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(4^k-3^k)A+(4\cdot3^k-3\cdot4^k)E\right\}$$

$$=A\sum_{k=1}^{n}(4^k-3^k)+E\sum_{k=1}^{n}(4\cdot3^k-3\cdot4^k)$$

$$=A\left\{\frac{4(1-4^n)}{1-4}-\frac{3(1-3^n)}{1-3}\right\}+E\left\{\frac{12(1-3^n)}{1-3}-\frac{12(1-4^n)}{1-4}\right\}$$

$$=\frac{2\cdot4^{n+1}-3^{n+2}+1}{6}A+(2\cdot3^{n+1}-4^{n+1}-2)E$$

$$\therefore\ c_n=\frac{2\cdot4^{n+1}-3^{n+2}+1}{6},\quad d_n=2\cdot3^{n+1}-4^{n+1}-2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot4^{n+1}-3^{n+2}+1}{6(2\cdot3^{n+1}-4^{n+1}-2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot3+\frac{1}{4^{n+1}}}{6\left\{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1-\frac{2}{4^{n+1}}\right\}}$$

$$=\frac{2}{-6}$$

$$=\underline{-\frac{1}{3}}\ /\!/$$