

2010年生命環境（環境・情報）第4問

4 A を成分が実数である2次の正方行列, E を2次の単位行列とする. 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める. $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく. また, 座標平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{b_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) A は $\sqrt{2}A^2 = (1 + \sqrt{3})A - \sqrt{2}E$ を満たすとする. A の逆行列 A^{-1} が存在することを示せ.
- (3) (2), かつ, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ のとき, x_3, y_3 を求めよ. ただし, A^{-1} が存在することを証明なしに用いてよい.
- (4) (3) のとき, $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$ となる最小の自然数 n を求めよ.