2016年 人文学部 第4問

4　a を正の定数とする．曲線 $y = x^3 - ax$ を C とし，直線 $y = b$ を ℓ とする．C と ℓ がちょうど2点を共有しているとき，以下の問いに答えよ．

(1) b を a で表せ．

(2) $a = 3$ で b が正のとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) C において，

$$y' = 3x^2 - a$$

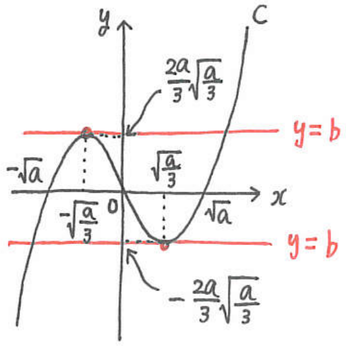
$$= 3\left(x - \sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\nearrow$

右の増減表より，グラフは右下になる．

$\therefore$ C と $y = b$ がちょうど2点を共有するのは，

$b = \pm\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ // のとき．



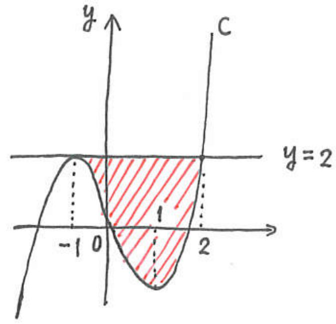
(2) $a = 3$ のとき．$b > 0$ より，$b = 2$

$C : y = x^3 - 3x$ と $y = 2$ の共有点は，

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$(x+1)^2(x-2) = 0$ より　$x = -1, 2$

$\therefore (-1, 2)$ と $(2, 2)$



$$\therefore S = \int_{-1}^{2} 2 - (x^3 - 3x)\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= 4 - 4 + 6 - \left(-2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)$$

$$= 6 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$ //