2011 年 工学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 正の整数 n に対して，$S_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$ とおく．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $S_{n+1}(x)$ を n，x および $S_n(x)$ を用いて表せ．

(2) m を正の整数とする．$x > 0$ のとき，不等式 $e^{\frac{x}{m+1}} > \dfrac{x}{m+1}$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ となることを示せ．

(3) 数学的帰納法を用いて，すべての正の整数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} S_n(x) = n!$ となることを示せ．