大阪府立大学

2014年 第6問

数理 石井K

6 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が

$$S_n = 2a_n + n^2 - n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) $a_{n+1} - 2a_n$ を n の式で表せ．

(3) $b_n = a_{n+1} - a_n - 2$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示し，初項 b_1 と公比を求めよ．

(4) a_n を n の式で表せ．

$S_1 = a_1 = 2a_1 + 1 - 1$

$\therefore \underline{a_1 = 0}$ //

$S_2 = 2a_2 + 4 - 2 \quad \therefore a_1 + a_2 = 2a_2 + 2$

$\therefore \underline{a_2 = -2}$ //

(2)
$$\begin{array}{rl} & S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1)^2 - (n+1) \\ -) & S_n = 2a_n + n^2 - n \\ \hline & a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2n + 1 - 1 \end{array}$$

$\therefore \underline{a_{n+1} - 2a_n = -2n}$ //

(3) (2)より．$b_n = a_n - 2n - 2$

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 2(n+1) - 2}{a_n - 2n - 2} = \frac{2a_n - 2n - 2n - 4}{a_n - 2n - 2} = \frac{2(a_n - 2n - 2)}{a_n - 2n - 2} = 2$$

また，$b_1 = a_2 - a_1 - 2 = -4$

$\therefore$ 初項 $b_1 = -4$，公比 2 の等比数列 //

(4) (3)より

$$b_n = -4 \cdot 2^{n-1} = -2^{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2 - 2^{n+1}$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 - 2^{k+1}$$

$$= 2(n-1) - \frac{4(1 - 2^{n-1})}{1 - 2}$$

$$= \underline{2n + 2 - 2^{n+1}}$$ //

これは $n = 1$ のときも成り立つ