筑波大学

2013年 第2問

$\boxed{2}$ nは自然数とする.

(1) $1 \leqq k \leqq n$を満たす自然数kに対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 媒介変数tによって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線C_nで囲まれた部分の面積S_nを求めよ．ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい.

(3) 極限値$\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ.