

2014年工学部第2問

2 座標平面において、行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ が表す移動（1次変換）を f とし、直線 $x + 2y = 1$ を l とする。次に答えよ。

- (1) 点 $P(p_1, p_2)$ が f によって移る点を $Q(q_1, q_2)$ とする。 P が l 上の点のとき、 Q は l 上にあることを示せ。
 (2) l 上の点 R は f によって R 自身に移る。

(i) R の座標を求めよ。

(ii) R と異なる l 上の点 P が f によって点 Q に移るとき、 $\frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RP}|}$ を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。