



2013年 総合理工 (数理・情報システム以外) 第2問

数理
石井K

2 円周上に異なる n 個の点があり, どの2点も線分で結ばれている. ここで n は4以上の自然数とする. 同様の確からしさで異なる2本の線分を1組選ぶとき, その2本が円の内部で交わっている確率を考える. たとえば, $n=4$ のときは, 線分が6本, 異なる2本の線分の組が15組, そのうち円の内部で交わるものは1組で, 円の内部で交わっている確率は $\frac{1}{15}$ となる. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $n=5$ のとき, 線分の数, 異なる2本の線分の組の数, そのうち円の内部で交わっている組の数をそれぞれ求めよ. また, 異なる2本の線分を1組選ぶとき, その2本が円の内部で交わっている確率を求めよ.
 (2) 一般に, 異なる2本の線分を1組選ぶとき, その2本が円の内部で交わっている確率を n を用いて表せ.

(1) 線分の数 は, $5C_2 = 10$ 本,,

異なる2本の線分の組の数は $10C_2 = 45$ 組,,

円の内部で交わっている組の数は円の内部の交点の個数に等しいから, 5組,,

よって, 求める確率は, $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$,,



(2) 線分の数 は, $nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ 本

異なる2本の線分の組の数は $\frac{1}{2}n(n-1)C_2 = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)\{\frac{1}{2}n(n-1)-1\}}{2}$

$$= \frac{1}{4}n(n-1) \cdot \frac{1}{2}(n^2-n-2)$$

$$= \frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1) \text{ 組.}$$

円の内部で交わっている組の数は, 円の内部の交点の個数に等しく,

n 個の点から異なる4点を選ぶと, その4点から2つの線分をつくり交点がちょうど1つ定まる.

よって 異なる4点の選び方と円の内部で交わっている線分の組は 1:1に対応している.

$$\therefore \text{その個数は } nC_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\therefore \text{求める確率は, } \frac{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)}{\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)} = \frac{n-3}{3(n+1)},,$$