# 島根大学

2014年 総合理工（数理・情報システム） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$とおく．$x$を実数とし，行列

$$X=\begin{pmatrix}3x-1&2x-1\\-3x+2&-2x+2\end{pmatrix}$$

を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数$n$に対して$X$の$n$乗を$X^n=\begin{pmatrix}P_n(x)&Q_n(x)\\R_n(x)&S_n(x)\end{pmatrix}$とおく．このとき，すべての$n$に対して，$x=\dfrac{1}{2}$のとき，$Q_n(x)=0$であることを示せ．また，すべての$n$に対して，$x=\dfrac{2}{3}$のとき，$R_n(x)=0$であることを示せ．

(2) $a$と$b$は定数とする．このとき，$X^2+aX+bE=O$をみたす実数$x$が存在するための$a$，$b$の条件を求めよ．

(3) $X^3=O$をみたす実数$x$は存在しないことを証明せよ．

(1) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき $\begin{cases}Q_1(x)=2x-1 \text{ より } & Q_1(\frac{1}{2})=0\\ R_1(x)=-3x+2 & R_1(\frac{2}{3})=0\end{cases}$ ∴成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると．$Q_k(\frac{1}{2})=R_k(\frac{2}{3})=0$

$$X^{k+1}=\begin{pmatrix}3x-1&2x-1\\-3x+2&-2x+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_k(x)&Q_k(x)\\R_k(x)&S_k(x)\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}Q_{k+1}(x)=(3x-1)Q_k(x)+(2x-1)S_k(x)\\ R_{k+1}(x)=(-3x+2)P_k(x)+(-2x+2)R_k(x)\end{cases}$$

$\therefore Q_{k+1}(\frac{1}{2})=R_{k+1}(\frac{2}{3})=0$ ∴ $n=k+1$のときも成り立つ ∴すべての自然数について成り立つ ▨

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より．

$$X^2-(x+1)X+\{(3x-1)(-2x+2)-(2x-1)(-3x+2)\}E=O$$

$\therefore X^2-(x+1)X+xE=O$ …① $X^2+aX+bE=O$ …②

①②より．$a+b+1=0$ ∴ $\underline{a+b=-1}$ //

(3) (i) $x=0$のとき．(2)より $X^2=X$ ∴ $X^3=X^2=X$ ∴ $X=O$となる$x$は存在しない

(ii) $x\neq 0$のとき $\det(X)=x\neq 0$より $X^{-1}$が存在する．これを$X^3=O$の右からかけて．$X^2=O$ くり返して．$X=O$

これをみたす$x$は存在しない

(i)，(ii)より $X^3=O$をみたす実数$x$は存在しない ▨