0001647542538999

東北大学

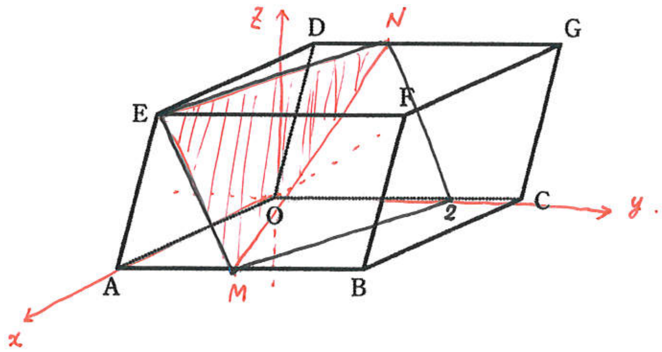
2014年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 下図のような平行六面体 OABC-DEFG が xyz 空間内にあり，O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D$(-1, 0, \sqrt{6})$ とする．辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN $= 4$ かつ DN $<$ GN を満たすように定める．

(1) N の座標を求めよ．

(2) 3 点 E，M，N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ．

(3) 3 点 E，M，N を通る平面による平行六面体 OABC-DEFG の切り口の面積を求めよ．



(1) $N(-1, t, \sqrt{6})$ $\left(0 < t < \frac{3}{2}\right)$ とおける．また．$B(2, 3, 0)$ より $M\left(2, \frac{3}{2}, 0\right)$

$\therefore MN^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2} - t\right)^2 + 6 = 16$ $\quad \therefore \left(\frac{3}{2} - t\right)^2 = 1$

$0 < t < \frac{3}{2}$ より．$t = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore \underline{N\left(-1, \frac{1}{2}, \sqrt{6}\right)}$ //

(2) $E(1, 0, \sqrt{6})$ より $\overrightarrow{EM} = \left(1, \frac{3}{2}, -\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{EN} = \left(-2, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\therefore$ 平面EMN上の点P は $\overrightarrow{EP} = u\overrightarrow{EM} + v\overrightarrow{EN} = \left(u - 2v, \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}v, -\sqrt{6}u\right)$

と表されるので，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EP} = \left(1 + u - 2v, \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}v, \sqrt{6} - \sqrt{6}u\right)$

x座標とz座標が0になるのは．$u = 1$，$v = 1$ のとき．このとき $\underline{P(0, 2, 0)}$ //

(3) $\overrightarrow{EN} = \left(-2, \frac{1}{2}, 0\right)$，$\overrightarrow{MP} = \left(-2, \frac{1}{2}, 0\right)$ より $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{MP}$

$\therefore$ 切り口は 平行四辺形 EMPN

EN と EM がなす角を θ とおくと．$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}}{|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|} = \dfrac{-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{629}}{4}} = -\dfrac{5}{\sqrt{629}}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{2\sqrt{151}}{\sqrt{629}}$

$\therefore S = 2 \cdot \triangle EMN = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{629}}{4} \cdot \dfrac{2\sqrt{151}}{\sqrt{629}} = \underline{\dfrac{\sqrt{151}}{2}}$ //