徳島大学

2013年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ $f(x) = e^{-x}$ とする．実数 t に対し，原点をOとする座標平面上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$，点 $\mathrm{B}(t - \log 2,\ f(t - \log 2))$ を考える．

(1) $t \geqq 0$ のとき，三角形OABの面積 S の最大値を求めよ．

(2) k を自然数とし，$t = k \log 2$ であるときの三角形OABの面積を S_k とする．自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ．

(1) $A(t,\ e^{-t})$，$B(t - \log 2,\ e^{-t+\log 2})$

$$\therefore\ S = \frac{1}{2}\left| e^{-t}(t - \log 2) - e^{-t+\log 2} \cdot t \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| t \cdot e^{-t} - e^{-t}\log 2 - 2e^{-t} \cdot t \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(te^{-t} + e^{-t}\log 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} \cdot (t + \log 2)$$

$$\therefore\ S' = -\frac{1}{2}e^{-t}(t + \log 2) + \frac{1}{2}e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} \cdot (1 - t - \log 2)$$

t	0	$\cdots$	$1-\log 2$	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S	$\frac{1}{2}\log 2$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\therefore$ S の最大値は $\underline{\dfrac{1}{e}\quad (t = 1 - \log 2)}$ //

(2) $S_k = \dfrac{1}{2} \cdot e^{-k\log 2} \cdot (k\log 2 + \log 2) = 2^{-(k+1)} \cdot (k+1)\log 2$

$\therefore\ S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とおくと．

$$S = \frac{1}{2^2} \cdot 2 \cdot \log 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 3\log 2 + \cdots + \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \log 2$$

$$-)\quad 2S = \frac{1}{2} \cdot 2\log 2 + \frac{3}{2^2}\log 2 + \frac{4}{2^3}\log 2 + \cdots + \frac{n+1}{2^n}\log 2$$

$$S = \log 2 + \frac{1}{2^2}\log 2 + \frac{1}{2^3}\log 2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\log 2 - \frac{n+1}{2^{n+1}}\log 2$$

$$= \log 2\left(1 + \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \underline{\frac{\log 2}{2^{n+1}} \cdot \left(3 \cdot 2^n - n - 3\right)}\ //$$