熊本県立大学

2011年 第3問

$\boxed{3}$ 正の数 α, β, a, b が $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\tan\alpha=\dfrac{1}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{b}$ を満たすとき，a を用いて b を表しなさい.

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{2}{a}}{1-\frac{1}{a^2}}=\frac{2a}{a^2-1}$$

$$\therefore \tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\beta}{1-\tan 2\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{2a}{a^2-1}+\frac{1}{b}}{1-\frac{2a}{a^2-1}\times\frac{1}{b}}$$

これが $\tan\frac{\pi}{4}=1$ になることから

$$\frac{2a}{a^2-1}+\frac{1}{b}=1-\frac{2a}{b(a^2-1)}$$

$$\therefore 2ab+a^2-1=b(a^2-1)-2a$$

$$\therefore b(a^2-2a-1)=a^2+2a-1$$

$a^2-2a-1=0$ の場合 $a>1$ より $a=1+\sqrt{2}$

このとき，$\beta=0$ となり不適.

よって $a^2-2a-1\neq 0$

$$\therefore b=\frac{a^2+2a-1}{a^2-2a-1}$$ //