0001841548518999

徳島大学

2014年 第3問

難!

数理 石井K

$\boxed{3}$ n 枚のカードに1から n までの自然数がひとつずつ書かれている．異なるカードには異なる数が書かれている．これら n 枚のカードを横一列に並べて，左端から i 番目（$1 \leqq i \leqq n$）のカードに書かれた数を a_i とする．

(1) $n=5$ のとき，$a_1 < a_2 < a_3$ かつ $a_3 > a_4 > a_5$ を満たすカードの並べ方の総数を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．次の条件（i），（ii）を満たすカードの並べ方の総数を n の式で表せ．ただし，（ii）では，$k=2$ のとき $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ は $a_1 < a_2$ を表し，$k=n-1$ のとき $a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$ は $a_{n-1} > a_n$ を表す．

（i）$1 < k < n$

（ii）$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ かつ $a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$

(3) $n \geqq 4$ とする．次の条件（i），（ii），（iii）を満たすカードの並べ方の総数を n の式で表せ．ただし，（iii）のそれぞれの不等式は (2) と同様に，$p=2$ のとき $a_1 > a_2$ を表し，$q=p+1$ のとき $a_p < a_{p+1}$ を表し，$q=n-1$ のとき $a_{n-1} > a_n$ を表す．

（i）$1 < p < q < n$

（ii）$a_1 = n$ かつ $a_p = 1$

（iii）$a_1 > a_2 > \cdots > a_p$ かつ $a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q$ かつ $a_q > a_{q+1} > \cdots > a_n$

(1) $a_3 = n$，残り4枚から2枚を選んで，条件をみたすように $\{a_1, a_2\}$ とし，並べることができる　$\therefore {}_4C_2 = \underline{6\text{通り}}$

(2) (1)と同様にして，$a_k = n$，残りの $n-1$ 枚から $k-1$ 枚をえらべば自動的に並びが決まるから，各 k に対して，${}_{n-1}C_{k-1}$ 通りある．

$$\therefore \sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-2} {}_{n-1}C_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\right) - 2$$

二項定理

$$= \underline{2^{n-1} - 2\text{ 通り}}$$

(3) $a_2 \sim a_{p-1}$ の決め方が ${}_{n-2}C_{p-2}$ 通り．$a_{p+1} \sim a_{q-1}, a_{q+1} \sim a_n$ の決め方は ${}_{n-p-1}C_{q-p+1}$ 通りある．$\therefore$ 各 p に対して．$\displaystyle\sum_{q=p+1}^{n-1} {}_{n-2}C_{p-2} \times {}_{n-p-1}C_{q-p+1}$

$$= {}_{n-2}C_{p-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} {}_{n-p-1}C_{q-p+1} = {}_{n-2}C_{p-2}\left(2^{n-p-1} - 1\right)\text{通り}.$$

$$\therefore \sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}C_{p-2} \cdot \left(2^{n-p-1} - 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}C_{p-2} \cdot 2^{n-p} - \sum_{p=2}^{n-2} {}_{n-2}C_{p-2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(2+1)^{n-2} - 2\cdot(n-2) - 1\right\} - \left\{2^{n-2} - (n-2) - 1\right\}$$

(3) のつづき

$$= \underline{\frac{3^{n-2} - 2^{n-1} + 1}{2}}\ //$$