



2014 年 第 3 問

3 関数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x > 0$ で考える. $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線を ℓ_a とし, ℓ_a と y 軸との交点を $(0, Y(a))$ とする. 以下の問いに答えよ. ただし, 実数 k に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0$ であることは証明なしで用いてよい.

- (1) $Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) $0 < a < b$ である a, b に対して, ℓ_a と ℓ_b が x 軸上で交わるとき, a のとりうる値の範囲を求め, b を a で表せ.
- (3) (2) の a, b に対して, $Z(a) = Y(a) - Y(b)$ とおく. $\lim_{a \rightarrow +0} Z(a)$ および $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ.