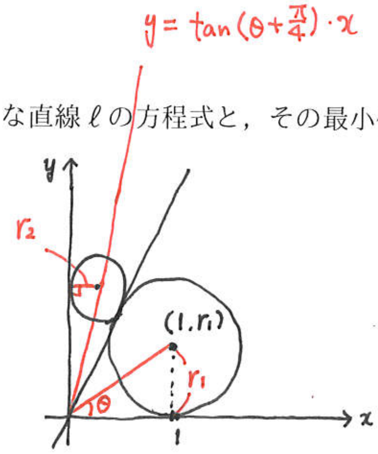
東京大学

2015 年 文系 第 3 問

$\boxed{3}$ ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の 3 条件（i），(ii)，(iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える．

（i）円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．
（ii）円 C_1，C_2 は直線 ℓ と同一点で接する．
（iii）円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と，その最小値を求めよ．



$\ell : y = \tan 2\theta \cdot x \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと，

$r_1 = \tan\theta \quad \cdots ①$

C_2 の中心は $\left(r_2,\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cdot r_2\right)$ とおける．

∴ 円が接するので，中心間のキョリ = 半径の和

$$\sqrt{(1-r_2)^2 + \left(r_1 - \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) r_2\right)^2} = r_1 + r_2$$

両辺 2 乗して，$1 - 2r_2 + r_2^2 + r_1^2 - 2\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) r_1 r_2 + \tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) r_2^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2$

$$\therefore\ 1 - 2r_2 - 2\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) r_1 r_2 + \tan^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) r_2^2 - 2r_1 r_2 = 0$$

① を代入して，整理すると，

$$\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} r_2 - 1\right)^2 = 0 \qquad \therefore\ r_2 = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} \quad \cdots ②$$

①，② より．

$$\begin{aligned} 8r_1 + 9r_2 &= 8\tan\theta + \frac{9 - 9\tan\theta}{1+\tan\theta} \\ &= \frac{8\tan^2\theta - \tan\theta + 9}{1+\tan\theta} \\ &= 8\tan\theta - 9 + \frac{18}{\tan\theta + 1} \\ &= 8(\tan\theta + 1) + \frac{18}{\tan\theta + 1} - 17 \\ &\geqq 2\sqrt{8\cdot 18} - 17 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$= 7$ （等号成立は．ℓ が $y = \frac{4}{3}x$ のとき）

$\tan\theta + 1 > 0$ より 相加・相乗の関係

等号成立は．
$(\tan\theta + 1)^2 = \frac{9}{4}$
$\therefore\ \tan\theta = \frac{1}{2}$
$\therefore\ \tan 2\theta = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$