2017年 理系 第1問



$\boxed{1}$ 実数 $a$, $b$ に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための $a$, $b$ についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

(1) $f(\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta$

$= 4\cos^3\theta + 2a\cos^2\theta + (b-3)\cos\theta - a$

$= \underline{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a}$ //

$g(\theta) = \dfrac{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a - (1+a+b)}{x-1}$

$= \underline{4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1}$ //

$$\begin{array}{r} 4x^2 + (2a+4)x + 2a+b+1 \\ x-1 \,\big)\, \overline{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - 2a - b - 1} \\ 4x^3 - 4x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline (2a+4)x^2 + (b-3)x \qquad\quad \\ (2a+4)x^2 - (2a+4)x \qquad\quad \\ \hline (2a+b+1)x - 2a - b - 1 \\ (2a+b+1)x - 2a - b - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

(2) $0 < \theta < \pi$ より，$-1 < x < 1$

$g(\theta) = 4\left(x + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 - \dfrac{(a+2)^2}{4} + 2a + b + 1$

$= 4\left(x + \dfrac{a+2}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{4}a^2 + a + b$

＊最小値をもつのは，$-1 < x < 1$ より頂点がこの区間に含まれる場合のみである．

$\therefore$ 最小値 0 をとるのは，$-1 < -\dfrac{a+2}{4} < 1$ かつ $-\dfrac{1}{4}a^2 + a + b = 0$ のとき

$\therefore$ $-6 < a < 2$ かつ $b = \dfrac{1}{4}a^2 - a$

$\therefore$ 求める条件は，$\underline{b = \dfrac{1}{4}a^2 - a \ (-6 < a < 2)}$ //

$b = \dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 1$ より $(a, b)$ が描く図形は

右のようになる．

ただし，両端点は含まない