



2014年 理学部・工学部 第4問

4 a, b は、 $0 < b < a$ を満たす実数とする。曲線 $y = e^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線 l_1 の方程式を $y = f(x)$ 、点 (a, e^a) における接線 l_2 の方程式を $y = g(x)$ とおく。また、 l_1 と l_2 の交点の x 座標を $p(a)$ とする。連立不等式

$$0 \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq e^x$$

の表す領域の面積を S_1 、連立不等式

$$b \leq x \leq a, \quad g(x) \leq y \leq e^x$$

の表す領域の面積を S_2 とし、 $R = e^{-b}S_2$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。必要ならば、すべての自然数 k に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

- (1) $p(a)$ を求めよ。
- (2) S_1 と S_2 を求めよ。
- (3) $t = a - b$ とする。 R を t のみの関数として表せ。
- (4) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} (a - p(a))$ を求めよ。
- (5) $b = p(a)$ とする。このとき、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。