



2012年工学部第2問

2 四面体  $OABC$  において、 $OA = 2$ 、 $OB = \sqrt{2}$ 、 $OC = 1$  であり、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$ 、 $\angle BOC = \frac{\pi}{4}$  であるとする。また、3点  $O$ 、 $A$ 、 $B$  を含む平面を  $\alpha$  とし、点  $C$  から平面  $\alpha$  に下ろした垂線と  $\alpha$  との交点を  $H$ 、平面  $\alpha$  に関して  $C$  と対称な点を  $K$  とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$  とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 、 $\vec{c} \cdot \vec{a}$  を求めよ。
- (2)  $\vec{OH}$ 、 $\vec{OK}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし、平面  $\alpha$  上の点  $P$  で  $GP + PC$  を最小にする点を  $P_0$  とする。このとき、 $\vec{OP}_0$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。また、点  $P_0$  は  $\triangle OAB$  の周または内部にあることを示せ。