

2010年理系第4問

4 a, b は $a < b$ をみたす実数とする. $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で, $g(x) \leq f(x)$ をみたすとする. 座標平面上, 不等式 $a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)$ をみたす点 (x, y) 全体からなる図形を A とする. A の面積 S が正のとき, A の重心の y 座標は,

$$\frac{1}{S} \int_a^b \frac{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2}{2} dx$$

で与えられる. この事実を用いて, 次の問いに答えよ.

- (1) r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする. 不等式 $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ をみたす点 (x, y) 全体からなる図形を B とおく. B の重心の y 座標 $Y(r)$ を r を用いて表せ.
- (2) t は正の実数とする. 不等式 $-1 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} - t \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ をみたす点 (x, y) 全体からなる図形を C とおく. C の重心の y 座標 $Z(t)$ を t を用いて表せ.
- (3) (1)で得られた $Y(r)$ と (2)で得られた $Z(t)$ について, $\lim_{r \rightarrow 1-0} Y(r)$ と $\lim_{t \rightarrow +0} Z(t)$ の大小を比較せよ.