2015年 都市教養（理系） 第1問

数理 石井K

1 以下の問いに答えなさい．

(1) 次の不定積分を求めなさい．

$$\int e^{-2x}\cos 2x\,dx$$

(2) nを正の整数とする．曲線

$$y = e^{-x}\sin x \quad ((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$$

と x 軸で囲まれる部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V_n を求めなさい．

(3) (2)で求めた V_n に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} V_{2n-1} = V_1 + V_3 + V_5 + \cdots$ を求めなさい．

(1) $I = \int e^{-2x}\cos 2x\,dx$ とおくと．部分積分により，

$$I = \int e^{-2x}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$$

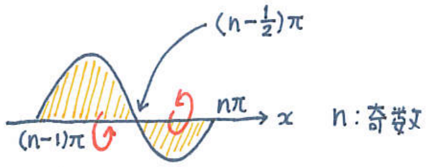
$$= \tfrac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x - \int -e^{-2x}\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

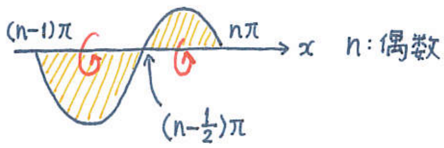
$$= \tfrac{1}{2}e^{-2x}\sin 2x - \tfrac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - I + C$$

$$\therefore\ \underline{I = \tfrac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) + C}\ _{//}$$ （Cは積分定数）

(2) nの偶奇で右の2つの場合が考えられるが

回転体の体積はどちらも次の式で与えられる．





$$V_n = \pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(e^{-x}\sin x)^2\,dx$$

$$= \pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-2x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$ （∵(1)の不定積分を使った）

$$= -\frac{\pi}{4}e^{-2n\pi} + \frac{\pi}{8}e^{-2n\pi} + \frac{\pi}{4}e^{-2(n-1)\pi} - \frac{\pi}{8}e^{-2(n-1)\pi}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{8}e^{-2(n-1)\pi}(1-e^{-2\pi})}\ _{//}$$

(3) 数列 $\{W_n\}$ を $W_n = V_{2n-1}$ と定義すると (2)より．$W_n = \underbrace{\frac{\pi}{8}\cdot(1-e^{-2\pi})}_{\text{定数}}\cdot(e^{-4\pi})^{n-1}$

∴ $\{W_n\}$ は，初項 $\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})$，公比 $e^{-4\pi}$ の等比数列

また，公比は $0 < |e^{-4\pi}| < 1$ をみたすので

$$\sum_{=1}^{\infty} V_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n$$

$$= \frac{\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})}{1-e^{-4\pi}}$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1-e^{-2\pi}}{(1+e^{-2\pi})(1-e^{-2\pi})}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{8(1+e^{-2\pi})}}\ _{//}$$