0001970459208999

東京大学

2015年 理系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1=1,\quad p_2=2,\quad p_{n+2}=\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\{p_n\}$: 1, 2, 5, 13, 34, …

$\{q_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

(1) $\dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1=1,\quad q_2=1,\quad q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ．

(1) $\dfrac{P_2^2+P_1^2+1}{P_2P_1}=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=3$ ∴ $\dfrac{P_{n+1}^2+P_n^2+1}{P_{n+1}\cdot P_n}=3$ と推測して数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．上の計算より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$\dfrac{P_{k+1}^2+P_k^2+1}{P_{k+1}P_k}=3 \cdots (*)$

$$\frac{P_{k+2}^2+P_{k+1}^2+1}{P_{k+2}\cdot P_{k+1}}=\frac{\left(\frac{P_{k+1}^2+1}{P_k}\right)^2+P_{k+1}^2+1}{\frac{P_{k+1}^2+1}{P_k}\cdot P_{k+1}}=\frac{(P_{k+1}^2+1)^2+P_k^2P_{k+1}^2+P_k^2}{(P_{k+1}^2+1)P_k\cdot P_{k+1}}=\frac{P_{k+1}^2+P_k^2+1}{P_k\cdot P_{k+1}}=3$$

$(*)$より

∴ (i).(ii) より すべての n で $\dfrac{P_{n+1}^2+P_n^2+1}{P_{n+1}P_n}=3$ が成り立つ ▨

(2) 与えられた漸化式より．$P_{n+1}^2+1=P_nP_{n+2}$

これを (1) の $\dfrac{P_{n+1}^2+P_n^2+1}{P_{n+1}\cdot P_n}=3$ に代入して，$\dfrac{P_n^2+P_nP_{n+2}}{P_{n+1}\cdot P_n}=3$ ∴ $P_n+P_{n+2}=3P_{n+1}$

$n=2,3,4,\cdots$ のとき．$\underline{P_{n+1}+P_{n-1}=3P_n}$ //

(3) $q_{2n-1}=P_n$，$q_{2n}=P_{n+1}-P_n$ と推測して数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．$q_1=1$，$q_2=1$，$P_1=1$，$P_2-P_1=1$ より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．

このとき．$q_{2k+1}=q_{2k}+q_{2k-1}=P_{k+1}-P_k+P_k=P_{k+1}$

$q_{2k+2}=q_{2k+1}+q_{2k}=P_{k+1}+P_{k+1}-P_k=2P_{k+1}+(P_{k+2}-3P_{k+1})=P_{k+2}-P_{k+1}$

∴ $n=k+1$ のとき成り立つ (i).(ii) より すべての n で $P_n=q_{2n-1}$ が成り立つ ▨