2013年第2問

$\boxed{2}$ xyz 空間に点P(0, 0, 5)がある．次の問いに答えよ．

(1) 球面 $x^2+y^2+(z-2)^2=9$ と平面 $x=\dfrac{1}{2}$ が交わってできる円を C とする．C の中心の座標と半径を求めよ．

(2) C 上に点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ s,\ t\right)$ をとったとき，2点P，Qを通る直線と xy 平面との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y,\ 0)$ とする．X，Y それぞれを s，t の式で表せ．

(3) Qが C 上のすべての点を動くとき，Rが描く曲線を C' とする．C' の長さ L を求めよ．

(1) $x=\frac{1}{2}$ を代入して． $\frac{1}{4}+y^2+(z-2)^2=9$ $\quad\therefore\ y^2+(z-2)^2=\frac{35}{4}$

$\therefore$ 中心 $\left(\frac{1}{2},0,2\right)$，半径 $\frac{\sqrt{35}}{2}$ //

(2) P, Q を通る直線上の点Sは．

$\overrightarrow{PS}=k\overrightarrow{PQ}$ (k：実数) と表せるので，$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PQ}$

ここで，$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2},s,t-5\right)$ より．$\overrightarrow{OS}=\left(\frac{k}{2},\ ks,\ (t-5)k+5\right)$

$\therefore$ S=R となるとき，$(t-5)k+5=0$ より． $k=\dfrac{5}{5-t}$

$\therefore\ X=\dfrac{5}{2(5-t)}\ ,\ Y=\dfrac{5s}{5-t}$ //

(3) $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},s,t\right)$ は C上の点なので， $s^2+(t-2)^2=\frac{35}{4}$ $\cdots$ ① をみたす．

また，(2)より． $t=5-\dfrac{5}{2X}\ ,\ s=\dfrac{Y}{2X}$ $\cdots$ ②

②を①に代入して．

$$\frac{Y^2}{4X^2}+\left(3-\frac{5}{2X}\right)^2=\frac{35}{4}$$

$$\therefore\ X^2-60X+Y^2+25=0$$

$$\therefore\ (X-30)^2+Y^2=875$$

$\therefore$ C′は中心 (30, 0, 0)，半径 $5\sqrt{35}$ の円

$\therefore\ L=2\pi\cdot5\sqrt{35}=10\sqrt{35}\pi$ //