

2010年第2問

2 定数 a , 関数 $f(x)$, および数列 $\{x_n\}$ を次のように定める.

$$1 < a < 2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - x^3)$$
$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ.
- (2) すべての自然数 n に対して $1 < x_n < 2$ を示せ.
- (3) すべての自然数 n に対して $x_{n+1} > x_n$ を示せ.
- (4) 次の不等式を満たす n に無関係な定数 b ($0 < b < 1$) があることを示せ.

$$2 - x_{n+1} \leq b(2 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (5) 数列 $\{x_n\}$ が収束することを示し, その極限值を求めよ.