新潟大学

2012年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\log_{10}3$ は無理数であることを示せ．

(2) $\dfrac{6}{13} < \log_{10}3 < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) 3^{26} の桁数を求めよ．

(1) 背理法で示す．

(1) 参考：$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明もチェックしておこう！

$\log_{10}3$ が有理数であると仮定する．

$\log_{10}3 = \dfrac{q}{p}$ （p, q は互いに素である自然数）と表せるから，

$10^{\frac{q}{p}} = 3$

両辺を p 乗して，$10^q = 3^p$ ⋯ (*)

3と10は互いに素であるから（左辺）の 10^q は3の倍数ではない

よって，(*) は成り立たない

したがって，$\log_{10}3$ は無理数である ■

(2) $3^2 < 10$ より，$\log_{10}3^2 < \log_{10}10$ すなわち，$\log_{10}3 < \dfrac{1}{2}$ ⋯①

また，$3^{13} = 1594323 > 10^6$ より，$\log_{10}3^{13} > \log_{10}10^6$ すなわち，$\log_{10}3 > \dfrac{6}{13}$ ⋯②

①，② より，$\dfrac{6}{13} < \log_{10}3 < \dfrac{1}{2}$ ■

(3) 3^{26} が n 桁であるとき，

$10^{n-1} \leqq 3^{26} < 10^n$ が成り立つ

底が10の対数をとると，

$n-1 \leqq 26\log_{10}3 < n$ ⋯③

(2)より，$12 < 26\log_{10}3 < 13$ ⋯④

③，④ より，$n = 13$ ∴ 13桁 //