0001837542618999

大分大学

2014年 医学部 第1問

数理 石井K

1 次の各問いに答えなさい.

(1) n 本中 k 本の当たりが入ったクジを n 人で順番に引く. 引いたクジは元に戻さないとして, i 番目にクジを引く人の当たる確率が $\dfrac{k}{n}$ であることを示しなさい. ただし, $0 < k < n$ とする.

(2) 関数 $y_1 = \sin x$ と $y_2 = 2\sin(a - x)$ について, $y = y_1 + y_2$ の最大値が $\sqrt{7}$ になるとき, 定数 a の値を求めなさい.

(3) 放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = bx$ で囲まれる部分の面積を 2 等分する直線 $x = p$ を求めなさい. ただし, a, $b > 0$ とする.

(1) n 本の区別のついたくじを n 人に配ることを考える. すべての配り方は $n!$ 通り

i 番目の人に当たりくじを配る配り方は k 通りで残りの $k-1$ 人には当たりくじを,

$n-k$ 人にははずれくじを配るので, あわせて. $k\cdot{}_{n-1}P_{k-1}\cdot{}_{n-k}P_{n-k}$ 通り

∴求める確率は $\dfrac{k\cdot{}_{n-1}P_{k-1}\cdot{}_{n-k}P_{n-k}}{n!} = \dfrac{k\cdot(n-1)!(n-k)!}{n!(n-k)!} = \dfrac{k}{n}$ ■

(2) $y_1 + y_2 = \sin x + 2(\sin a\cos x - \cos a\sin x)$

$= (1-2\cos a)\sin x + 2\sin a\cos x$

合成

$= \sqrt{(1-2\cos a)^2 + 4\sin^2 a}\ \sin(x+\alpha)$

$= \sqrt{5-4\cos a}\ \sin(x+\alpha)$

∴ y の最大値が $\sqrt{7}$ より $5-4\cos a = 7$ ∴ $\cos a = -\dfrac{1}{2}$

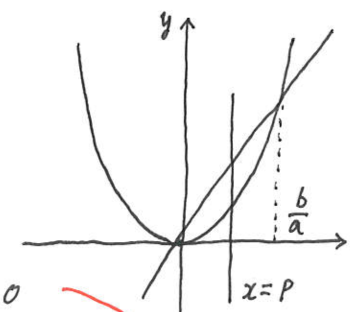
∴ $a = \dfrac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $\dfrac{4}{3}\pi + 2\pi n$ $\iff$ $a = (2n+\frac{2}{3})\pi$, $(2n+\frac{4}{3})\pi$ //

(n は整数)

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{b}{a}} bx - ax^2\,dx = -a\int_0^{\frac{b}{a}} x\left(x-\frac{b}{a}\right)dx$

$= \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$

$= \dfrac{b^3}{6a^2}$



∴ $\displaystyle\int_0^{p} bx - ax^2\,dx = \frac{b^3}{12a^2}$ $\iff 4a^3p^3 - 6a^2bp^2 + b^3 = 0$

$\iff (2ap-b)(2a^2p^2 - 2abp - b^2) = 0$ 因数定理.

∴ $p = \dfrac{b}{2a}$, $\dfrac{(1\pm\sqrt{3})b}{2a}$ であるが $0 < p < \dfrac{b}{a}$ をみたすのは $p = \dfrac{b}{2a}$ //