

2013年第1問

1 実数  $x, y, z, w$  が  $xy = 1, z + w = 1, xw + yz = 1, yzw = 1$  をみたすとき、下の問いに答えよ。

(1)  $|x| \neq 1$  であることを示せ。

(2)  $x, y, z, w$  の値を求めよ。

(1) 背理法で示す。

(i)  $x = 1$  と仮定すると。

$$xy = 1 \text{ より } y = 1 \quad \text{このとき} \quad \begin{cases} z + w = 1 \\ zw = 1 \end{cases}$$

これをみたす。実数  $z, w$  は 二次方程式の関係より。

$x^2 - x + 1 = 0$  の解となるが、この方程式の判別式を  $D$  とおくと。

$$D = 1 - 4 < 0 \quad \text{となり、実数解をもたない}$$

$\therefore z, w$  が実数であることに矛盾。  $\therefore x \neq 1$

(ii)  $x = -1$  と仮定すると。

$$xy = 1 \text{ より } y = -1 \quad \text{このとき} \quad \begin{cases} z + w = 1 \cdots \textcircled{1} \\ z + w = -1 \cdots \textcircled{2} \\ zw = -1 \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$  を、同時にみたす実数  $z, w$  は存在しないので矛盾。  $\therefore x \neq -1$

(i), (ii) より、 $|x| \neq 1$  が示された。  $\square$

(2)  $xy = 1$  と  $yzw = 1$  より、 $xw - yzw = 0$

$$\therefore y(x - zw) = 0 \quad \text{ここで } xy = 1 \text{ より } y \neq 0 \quad \therefore x = zw, y = \frac{1}{zw}$$

$$\therefore z + w = 1, \quad zw^2 + \frac{1}{w} = 1 \quad \text{より } z \text{ を消去して}$$

$$(1-w)w^2 + \frac{1}{w} = 1 \Leftrightarrow (1-w)(1+w)(1-w+w^2) = 0$$

$w$ : 実数より  $w = \pm 1$   $w = 1$  のとき  $z = 0$  となり不適。

$$\therefore w = -1$$

$$\underline{(x, y, z, w) = (-2, -\frac{1}{2}, 2, -1)} \quad \text{これは各式をすべてみたす。}$$