0002082277197999

東京学芸大学

2015年 第1問

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて，線分OA，AB，COをそれぞれ2：1に内分する点をD，E，Fとする．ベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とおくとき，下の問いに答えよ．

(1) 線分BC上の点Pが3点D，E，Fを含む平面上にあるとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) (1)でとった点Pに対して，四角形DEPFの対角線の交点をQとしたとき，$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{b} + (1-x)\vec{c}$　$(0 < x < 1)$ とおくと，

点Pが平面DEF上にあることから

$\overrightarrow{DP} = s\overrightarrow{DE} + t\overrightarrow{DF}$　(s, t は実数) と表せる．

$$\therefore\ -\frac{2}{3}\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c} = s\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

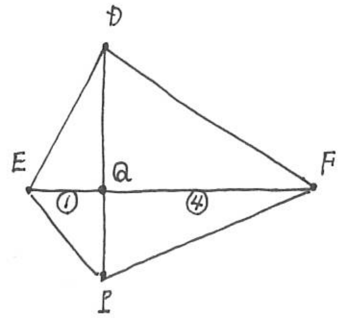
$$= \left(-\frac{s}{3} - \frac{2t}{3}\right)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}$$

係数を比較して，
$$\begin{cases} -\frac{2}{3} = -\frac{s}{3} - \frac{2t}{3} \\ x = \frac{2}{3}s \\ 1 - x = \frac{1}{3}t \end{cases}$$

これを解くと，$x = \frac{8}{9}$　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OP} = \frac{8}{9}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{c}}$ //　また，このとき $s = \frac{4}{3}$，$t = \frac{1}{3}$

(2) (1)より，$\overrightarrow{DP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{5}\overrightarrow{DF}\right)$$



$$\therefore\ \overrightarrow{DQ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{5}\overrightarrow{DF}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OD} = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OQ} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{8}{15}\vec{b} + \frac{1}{15}\vec{c}}\ //$$