群馬大学

2014年 教育学部（数学・技術）第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 をそれぞれ1から9までの整数とし，a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 の中に同じ数がいくつあってもよいとする．$[a_1a_2a_3]$ は3桁の整数 $a_1\times100+a_2\times10+a_3\times1$ を表し，$[b_1b_2b_3]$ は3桁の整数 $b_1\times100+b_2\times10+b_3\times1$ を表し，$[b_1b_2b_326]$ は5桁の整数 $b_1\times10000+b_2\times1000+b_3\times100+2\times10+6\times1$ を表すとする．p, q, r を次の条件とする．

p : $[a_1a_2a_3]-1$ は50で割り切れる．
q : $[b_1b_2b_326]$ は $[a_1a_2a_3]$ の26倍である．
r : $[b_1b_2b_3]$ は整数の2乗ではない．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 命題「$q \Longrightarrow p$」が真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ．
(2) 条件 q を満たす組 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ は何組あるか．
(3) 命題「$q \Longrightarrow r$」が真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ．

(1) q が成り立つとき．$10000b_1+1000b_2+100b_3+26=26(100a_1+10a_2+a_3)$

$\therefore 100(100b_1+10b_2+b_3)=100\cdot26a_1+26(10a_2+a_3-1)$

左辺は100の倍数なので，$26(10a_2+a_3-1)$ は100の倍数．

$\therefore 10a_2+a_3-1$ は50の倍数．

一方．$[a_1a_2a_3]-1=100a_1+10a_2+a_3-1=100a_1+(10a_2+a_3-1)$

したがって．50の倍数となり．p が成り立つ．すなわち $q\Rightarrow p$ は真 ▨

(2) (1)より．$q\Rightarrow p$ なので，$(a_2, a_3)=(0, 1), (5, 1)$ であることが必要．

$a_2\neq0$ より．$(a_2, a_3)=(5, 1)$

$a_1\geqq4$ のとき．$26\times[a_1a_2a_3]$ は5桁になる $\therefore$ $\underline{6組}$

(3) q が成り立つとき．p も成り立つので (2) で求めた

$(a_1, a_2, a_3)=(4, 5, 1), (5, 5, 1), (6, 5, 1), (7, 5, 1), (8, 5, 1), (9, 5, 1)$

の場合から反例を探す．$[b_1b_2b_326]=26\times[a_1a_2a_3]$ より．

$[b_1b_2b_3]$ が平方数なら．$[b_1b_2b_3]\times100=26\times([a_1a_2a_3]-1)$

(左辺) は13で割り切れる平方数 $\therefore$ $[a_1a_2a_3]$ は13でわると1余る．

$\therefore [a_1a_2a_3]=651$，$[b_1b_2b_3]=169$ のとき．$169=13^2$ となり．反例となる ▨