



2017年理学部第3問

3  $n$  を自然数とし、対数は自然対数とする。  $x > 0$  の範囲で、2つの曲線  $C: y = x \log x$  と  $C_n: y = k_n x^{n+1}$  を考える。  $C$  と  $C_n$  は共有点  $P_n$  をもち、かつ  $P_n$  における  $C$  と  $C_n$  の接線が一致するように定数  $k_n$  を定める。  $P_n$  の  $x$  座標を  $a_n$  とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 関数  $y = x \log x$  ( $x > 0$ ) の増減、極値、および曲線  $C$  の凹凸、変曲点を調べ、 $C$  の概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$  であることは証明せずに用いてよい。
- (2)  $k_n$  および  $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。
- (3) 曲線  $C$  と  $C_2$  および、2直線  $x = a_1$ ,  $x = a_2$  で囲まれた部分の面積  $T$  を求めよ。
- (4) 点  $P_n$  における曲線  $C_n$  の接線と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を  $b_n$  とし、 $C_n$ , 2直線  $x = a_n$ ,  $x = b_n$  および  $x$  軸で囲まれた部分の面積を  $S_n$  とする。極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n$  を求めよ。ただし、 $e$  を自然対数の底とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  であることは証明せずに用いてよい。