



2013年工学部第4問

4 θ は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) すべての自然数 k に対して $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ.

(2) n は 2 以上の自然数とし, $\theta = \frac{2\pi}{n}$ とする. $B = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ とおくと, $AB = B + E - A$ が成り立つことを示せ. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(3) (2) の条件のもとで, $B = -E$ が成り立つことを示せ.