0001872277218999

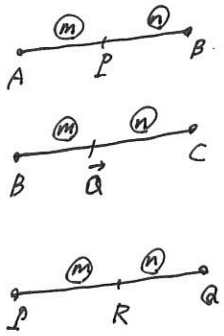
東京学芸大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ 平面上に異なる3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)がある．線分AB, BCを$m:n$に内分する点をそれぞれP($\vec{p}$), Q($\vec{q}$)とする．さらに線分PQを$m:n$に内分する点をR($\vec{r}$)とする．$t=\dfrac{m}{m+n}$ $(0<t<1)$とするとき，下の問いに答えよ．

(1) $\vec{r}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$およびtを用いて表せ．

(2) 1辺の長さが1の正三角形ABCの頂点A，B，Cに対し，上のように点Rをとる．直線ACに対して点Bと対称な位置にある点をOとする．点Rは，点Oを中心とし半径OAの円の外部にあることを示せ．

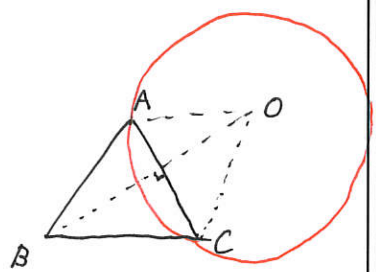


(1) $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$, $\vec{q}=\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$ より

$$\vec{r}=\frac{n\vec{p}+m\vec{q}}{m+n}$$
$$=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$$

ここで，$t=\dfrac{m}{m+n}$, $1-t=\dfrac{n}{m+n}$ より

$$\vec{r}=(1-t)\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}+t\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}$$
$$=\underline{(1-t)^2\vec{a}+2t(1-t)\vec{b}+t^2\vec{c}}\ //$$



(2) (1)より，ベクトルの始点をOにとると．

$$\overrightarrow{OR}=(1-t)^2\overrightarrow{OA}+2t(1-t)\overrightarrow{OB}+t^2\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OR}|^2=(1-t)^4+4t^2(1-t)^2+t^4+4t(1-t)^3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4t^3(1-t)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$+2t^2(1-t)^2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$

ここで $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos30^\circ=1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{2}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}$ より．

$$|\overrightarrow{OR}|^2=(1-t)^4+4t^2(1-t)^2+t^4+6t(1-t)^3+6t^3(1-t)+t^2(1-t)^2$$
$$=\{t+(1-t)\}^4+2t(1-t)^3+2t^3(1-t)-t^2(1-t)^2$$
$$=1+\underbrace{t(1-t)\left\{5\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}\right\}}_{>0}$$

$\therefore |\overrightarrow{OR}|^2>1$ となり． $|\overrightarrow{OR}|>1$ これより点Rは円の外部の点である