0001872457218999

東京学芸大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)$ を区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続な関数とする．このとき，定積分

$$I=\int_0^1\left[2f(x)\log(x+1)-\{f(x)\}^2\right]dx$$

について下の問いに答えよ．

(1) I の値を最大にするような $f(x)$ を求めよ．

(2) I の最大値を求めよ．

(1) 実数 $a\in[0,1]$ に対して．

$$2f(a)\log(a+1)-\{f(a)\}^2=-\{f(a)-\log(a+1)\}^2+\{\log(a+1)\}^2$$

が成り立つので

$f(a)=\log(a+1)$ のとき（左辺）は最大値 $\{\log(a+1)\}^2$ をとる

$\therefore$ $\underline{f(x)=\log(x+1)\text{ のとき．}I\text{ は最大}}$ //

(2) (1)より I の最大値 I_{max} は

$$
\begin{aligned}
I_{max}&=\int_0^1\{\log(x+1)\}^2dx\\
&=\int_0^1(x+1)'\{\log(x+1)\}^2dx\\
&=\Big[(x+1)\{\log(x+1)\}^2\Big]_0^1-\int_0^1 2\log(x+1)\,dx\\
&=2(\log 2)^2-2\int_0^1(x+1)'\log(x+1)\,dx\\
&=2(\log 2)^2-2\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1+2\int_0^1dx\\
&=\underline{2(\log 2)^2-4\log 2+2}
\end{aligned}
$$
//