東京学芸大学

2012年第1問

$\boxed{1}$ 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする．下の問いに答えよ．

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$ が成り立つことを示せ．

(2) $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$ のとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めよ．

(1) 解が α,β,γ であることから

$x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と表せる．右辺を展開すると．

$x^3+ax^2+bx+c = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

これが x の恒等式であることから．両辺の係数を比較して．

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$ となる ▨

(2) $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ に代入して

$1^2-3=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ $\quad\therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ に代入して

$7-3\alpha\beta\gamma=1\cdot(3+1)$ $\quad\therefore \alpha\beta\gamma=1$

$\therefore$ (1) より．α,β,γ を解にもつ3次方程式は．

$x^3-x^2-x-1=0$

$\therefore \alpha^4=\alpha(\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)+\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

$=\alpha^3+\alpha^2+\alpha$

他も同様にして，$\beta^4=\beta^3+\beta^2+\beta$, $\gamma^4=\gamma^3+\gamma^2+\gamma$

$\therefore \alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha+\beta+\gamma$

$=7+3+1$

$=\underline{11}$ //