0002303726967999

東京学芸大学

2016年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 a に対して，関数 $f(x)=x^4+\dfrac{8}{3}ax^3-2x^2-8ax$ が $x=X$ で極大値 Y をとるとする．a の値が変化するとき，点 $(X,\ Y)$ が描く軌跡を図示せよ．

$$f'(x)=4x^3+8ax^2-4x-8a$$
$$=4x^2(x+2a)-4(x+2a)$$
$$=4(x+1)(x-1)(x+2a)$$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは．$x=\pm1,\ -2a$

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大

(i) $-2a<-1$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき．

右の増減表より，$x=-1$ で極大値 $1-\dfrac{8}{3}a-2+8a=\dfrac{16}{3}a-1$ をとる．

よって，$X=-1$，$Y=\dfrac{16}{3}a-1$ 軌跡は $X=-1$（ただし，$Y>\dfrac{5}{3}$）

(ii) $-1<-2a<1$ すなわち，$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき．

同様にすると，$x=-2a$ で 極大値 $f(-2a)=16a^4-\dfrac{64}{3}a^4-8a^2+16a^2=-\dfrac{16}{3}a^4+8a^2$ をとる．

よって．$X=-2a$，$Y=-\dfrac{16}{3}a^4+8a^2$ 軌跡は．$Y=-\dfrac{1}{3}X^4+2X^2$ $(-1<X<1)$

(iii) $-2a>1$ すなわち $a<-\dfrac{1}{2}$ のとき

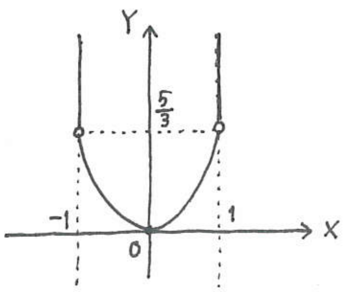
同様にすると，$x=1$ で 極大値 $f(1)=1+\dfrac{8}{3}a-2-8a=-\dfrac{16}{3}a-1$ をとる

よって，$X=1$，$Y=-\dfrac{16}{3}a-1$ 軌跡は．$X=1$（ただし，$Y>\dfrac{5}{3}$）

(i)〜(iii) と $g(x)=-\dfrac{1}{3}x^4+2x^2$ とおいて $y=g(x)$ のグラフをかくことで (X,Y) が描く軌跡がえられる

$$g'(x)=-\frac{4}{3}x^3+4x=-\frac{4}{3}x(x^2-3)=-\frac{4}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$(\frac{5}{3})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(\frac{5}{3})$



$\therefore$ 求める軌跡は上のようになる（白丸は除く）