2012年 工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) A^2 と A^3 を求めなさい．

(2) 自然数 n に対して A^n を推測し，それを数学的帰納法により証明しなさい．

(1) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$ //

$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$ //

(2) $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ と推測して，数学的帰納法により証明する．

(i) $n=1$ のとき．$A^1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となり 成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると．$A^k=\begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\therefore A^{k+1} &= A\cdot A^k \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^k-1+2^k \\ 0 & 2\cdot 2^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+1}-1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ が成り立つ ▨