2015年 医学部 第2問

数理 石井K

2 次の $\boxed{}$ を埋めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2}\right)^3 dx = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である． 2 35

(2) 座標平面における曲線 $C: y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}\sqrt{x}$ $(x>0)$ 上に点Pをとり，原点Oと点Pとを結ぶ線分OPを考える．線分OPと曲線 C により囲まれた図形の面積を A とし，線分OPを一辺とする正方形の面積を S とする．点Pが曲線 C 上を動くとき，面積比 $\dfrac{A}{S}$ のとり得る最大値を M とすれば $M = \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である． 1 36

(1) $x = \sin\theta$ とおいて置換積分する． $dx = \cos\theta \cdot d\theta$， $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \theta & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$

(別) $t = 1-x^2$ とおいて置換積分すれば1回で求められた…． の置換で

$$(与式) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)^3 \cdot \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^4\theta\, d\theta$$

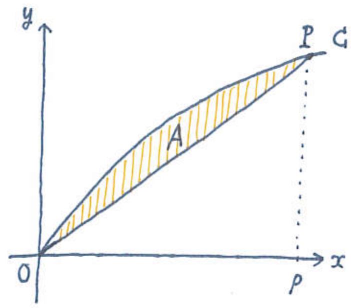
ここで $t = \cos\theta$ とおいて置換積分する． $dt = -\sin\theta\, d\theta$， $\begin{array}{c|c} \theta & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ t & 1 \to 0 \end{array}$

$$\therefore (与式) = \int_1^0 -(1-t^2)t^4\, dt$$

$$= \int_0^1 t^4 - t^6\, dt$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{35}$$



(2) $P\left(P, \frac{4}{3}P + \frac{2}{3}\sqrt{P}\right)$ $(P>0)$ とおくと． $OP: y = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3\sqrt{P}}\right)x$

$$\therefore A = \int_0^P \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{x} - \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3\sqrt{P}}\right)x\, dx$$

$$= \int_0^P -\frac{2}{3\sqrt{P}}x + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{P}}\right]_0^P$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}P\sqrt{P} - \frac{1}{2}P\sqrt{P}\right)$$

$$= \frac{1}{9}P\sqrt{P}$$

$OP^2 = S$ より．

$$S = P^2 + \left(\frac{4}{3}P + \frac{2}{3}\sqrt{P}\right)^2$$

$$= P^2 + \frac{16}{9}P^2 + \frac{16}{9}P\sqrt{P} + \frac{4}{9}P$$

$$= \frac{25}{9}P^2 + \frac{16}{9}P\sqrt{P} + \frac{4}{9}P$$

$$\therefore \frac{A}{S} = \frac{\frac{1}{9}P\sqrt{P}}{\frac{25}{9}P^2 + \frac{16}{9}P\sqrt{P} + \frac{4}{9}P} = \frac{1}{25\sqrt{P} + \frac{4}{\sqrt{P}} + 16} \leqq \frac{1}{36}$$ (等号成立は，$P = \frac{4}{25}$ のとき) $\therefore M = \frac{1}{36}$

相加・相乗の関係より． $\geqq 2\sqrt{100} = 20$