0002310549867999

東京医科大学

2016年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 平面上の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が条件

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \quad \text{かつ} \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \frac{25}{44}$$

をみたすとする．ベクトル $\vec{c}$ が正の数 t を用いて

$$\vec{c} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

と表され，かつ $|\vec{c}| = \sqrt{5}$ であるならば

$$t = \frac{\boxed{\text{アイ}}\ 16}{\boxed{\text{ウ}}\ 5}$$

である．

(2) 座標平面上の放物線 $C_1 : y = \dfrac{4}{5}x^2$ と円 $C_2 : x^2 + (y-a)^2 = a^2$ （a は正の定数）が3つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a > \frac{\boxed{\text{エ}}\ 5}{\boxed{\text{オ}}\ 8}$$

である．

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\ 2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{25}{44}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{63}{88}$

$\vec{c} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ より

$|\vec{c}|^2 = (1-t)^2|\vec{a}|^2 + 2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$

$= 2t^2 - 2t + 1 + 2t(1-t)\cdot\dfrac{63}{88}$

$\therefore\ |\vec{c}| = \sqrt{5}$ より

$5 = 2t^2 - 2t + 1 + \dfrac{63}{44}t - \dfrac{63}{44}t^2$

$\therefore\ 25t^2 - 25t - 176 = 0$

$(5t-16)(5t+11) = 0$

$t > 0$ より $\underline{t = \dfrac{16}{5}}$ //

(2) 3つの共有点のうち1つは原点であり，

x座標が最大のものを $P(t, \frac{4}{5}t^2)$ とおく $(t>0)$

点Pにおける C_1 の接線の傾きは $y' = \frac{8}{5}x$ より $\frac{8}{5}t$

$\therefore$ 点Pにおける C_1 の法線は．$y = -\dfrac{5}{8t}(x-t) + \dfrac{4}{5}t^2$

これは円 C_2 の中心を通るので

$a = \dfrac{5}{8} + \dfrac{4}{5}t^2$

$\therefore\ \dfrac{4}{5}t^2 = a - \dfrac{5}{8} > 0$ より

$\underline{a > \dfrac{5}{8}}$ //