杏林大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 実数 x に対し

$$f(x)=e^{3x}+e^{-3x},\qquad g(x)=e^{3x}-e^{-3x}$$

で定義される2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ および $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ で与えられる関数 $h(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$，$g(x)$ は

$$\frac{d}{dx}f(x)=\boxed{\text{ア}}\,g(x),\qquad \frac{d}{dx}g(x)=\boxed{\text{イ}}\,f(x)$$

という関係を満たす．また，関数 $h(x)$ に対して

$$h(0)=\boxed{\text{ウ}},\quad \lim_{x\to\infty}h(x)=\boxed{\text{エ}},\quad \lim_{x\to-\infty}h(x)=\boxed{\text{オカ}},\quad \frac{d}{dx}h(x)=\frac{\boxed{\text{キク}}}{(f(x))^2}$$

が成り立つ．

(2) x 座標が $a=\dfrac{1}{3}\log_e 2$ である点 $(a,\ h(a))$ における，曲線 $y=h(x)$ の接線を C とする．接線 C と直線 $y=\boxed{\text{エ}}$ の交点の x 座標を b とすると，$b-a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ となる．

(3) $x\geqq a$ の領域において，接線 C，曲線 $y=h(x)$，直線 $y=\boxed{\text{エ}}$ および直線 $x=t\ (>b)$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とすると，

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}+\frac{1}{\boxed{\text{タ}}}\log_e\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

が成り立つ．