東京医科大学

2016年 医学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{1-x+x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ で囲まれた図形を F とする．

(1) 図形 F の面積を S とすれば

$$S = \frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}\pi$$

2　3　9

である．

(2) 図形 F を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とすれば

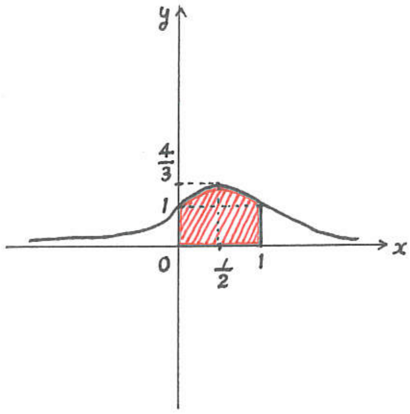
$$V = \frac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カキ}}\pi^2 + \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi$$

4　3　27　2　3

である．

(1) $y = \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y = 0$

∴ グラフは右のようになる．



$$\therefore\ S = \int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$t = x - \frac{1}{2}$ とおいて置換積分する． $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & -\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \end{array}$　$dt = dx$

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおいて置換積分する． $\begin{array}{c|c} t & -\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{6} \end{array}$　$dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$\therefore\ S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,d\theta$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi \ //$$

2枚目へつづく

0002310729867999

2016年 医学部 第4問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上の曲線 $C: y = \dfrac{1}{1-x+x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ で囲まれた図形を F とする．

(1) 図形 F の面積を S とすれば

$$S = \frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}\pi$$

である．

(2) 図形 F を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とすれば

$$V = \frac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カキ}}\pi^2 + \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\pi$$

である．

(2) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left\{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right\}^2}\,dx$

$t = x - \frac{1}{2}$ とおいて置換積分する. $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & -\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \end{array}$　$dt = dx$

$V = \pi\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^2}\,dt$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおいて置換積分する. $\begin{array}{c|c} t & -\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{6} \end{array}$　$dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{16}{9}\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \underline{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi^2+\frac{2}{3}\pi} \end{aligned}$$ //