0002132817687999

# 東京医科大学

2014年 医学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{\phantom{ア}}$ を埋めよ.

(1) 座標平面上の点 $A\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通る2曲線 $C_1: y=\dfrac{1}{4}x^2$, $C_2: ax^2+by^2=1$ ($a$, $b$は正の定数) を考える. 点Aにおける2曲線 $C_1$, $C_2$ の接線が直交するとき

$$a=\frac{\boxed{ア}\ 8}{\boxed{イ}\ 9},\quad b=\frac{\boxed{ウエ}\ 16}{\boxed{オ}\ 9}$$

である.

(2) 座標平面の点 $P(x,\ y)$ が円 $C: (x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{16}$ 上を動くとき, 式

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

がとる最大値を $M$ とすれば

$$M=\frac{\boxed{カキ}\ 32}{\boxed{クケ}\ 15}$$

である.

(1) $C_1$において. $y'=\frac{1}{2}x$

$C_2$において. $2ax+2by\cdot y'=0$

$\therefore\ y'=-\dfrac{ax}{by}$

よって. 接線が直交することより. $\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{a\cdot 1}{b\cdot\frac{1}{4}}\right)=-1$

$\therefore\ b=2a\ \cdots$ ①

Aは$C_2$上の点より. $a+\dfrac{b}{16}=1\ \cdots$ ②

①, ② より. $\underline{a=\dfrac{8}{9},\ b=\dfrac{16}{9}}$ //

(2) $\dfrac{y}{x}=k$ とおくと. $y=kx$

これをCの式に代入して.

$(k^2+1)x^2-2(k+1)x+\dfrac{31}{16}=0$

これが実数解をもつので. 判別式Dは.

$D/4=(k+1)^2-(k^2+1)\cdot\dfrac{31}{16}\geqq 0$

をみたす.

$\therefore\ 15k^2-32k+15\leqq 0\ \cdots(*)$

$k>0$であるから. 両辺$k$で割って.

$15\left(k+\dfrac{1}{k}\right)\leqq 32$

$\therefore\ k+\dfrac{1}{k}\leqq\dfrac{32}{15}$

すなわち. $\underline{M=\dfrac{32}{15}}$ //

(注) 空欄をうめる問題なので. これで良い

記述式の場合は. (*)の等号成立は.

$k=\dfrac{16\pm\sqrt{31}}{15}$

このとき. $y=\dfrac{16\pm\sqrt{31}}{15}x$ と C が

共有点をもつことを確かめる必要がある.