0002118721887999

東京女子大学

2015年 現代教養 第8問

数理 石井K

$\boxed{8}$ xy 平面上の直線 $y = ax$ を L とし，曲線 $y = xe^x$ を C とする．このとき，以下の設問に答えよ．

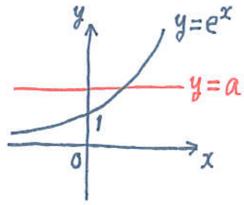
(1) L と C が異なる2点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) $x < 0$ の範囲で L と C が交わるとき，L と C で囲まれた図形の面積を a で表せ．

(1) $xe^x - ax = 0$ が異なる2つの実数解をもつので

$x(e^x - a) = 0$

$\therefore$ $e^x - a = 0$ が $x = 0$ 以外の実数解をもつ



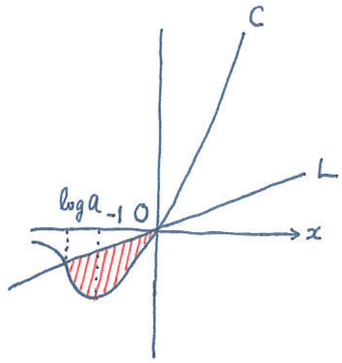
$\therefore$ 右の図より，$\underline{0 < a < 1,\ 1 < a}$ //

(2) (1)の議論より，$x<0$ で L と C が交わるのは，$0<a<1$ のとき．

このとき，C において，$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

(注) C と L の位置関係さえ分かれば増減表・グラフはなくてもよい．



$\therefore$ 右図のようになる．

(1)より，$e^x = a \iff x = \log a$

$\therefore$ 交点は $(\log a, a\log a)$ と $(0, 0)$

$$\therefore\ S = \int_{\log a}^{0} ax - xe^x\, dx$$

$$= \int_{\log a}^{0} ax\, dx - \int_{\log a}^{0} x(e^x)'\, dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2\right]_{\log a}^{0} - \left[xe^x\right]_{\log a}^{0} + \int_{\log a}^{0} e^x\, dx$$

$$= -\frac{a}{2}(\log a)^2 + a\log a + \left[e^x\right]_{\log a}^{0}$$

$$= \underline{-\frac{a}{2}(\log a)^2 + a\log a + 1 - a}\ //$$