0002076543297999

高知大学

2015年第2問

数理 石井K

2 次の条件（イ），（ロ）によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

（イ）$a_1 = \sqrt{2}+1$

（ロ）$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し

$$a_{n+1} = \begin{cases} -\sqrt{2}a_n - 1 & (a_n < 10 \text{ のとき}) \\ (\sqrt{2}-1)a_n + 6 & (a_n > 10 \text{ のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) $n \geqq 5$ のとき，$a_n > 10$ であることを示せ．

(3) $n \geqq 5$ のとき，a_n を n の式で表せ．

(1) $a_1 = \sqrt{2}+1 < 10$ であるから，$a_2 = -\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-1$　　$\therefore \underline{a_2 = -\sqrt{2}-3}$ //

$a_2 = -\sqrt{2}-3 < 10$ であるから，$a_3 = -\sqrt{2}(-\sqrt{2}-3)-1$　　$\therefore \underline{a_3 = 3\sqrt{2}+1}$ //

$a_3 = 3\sqrt{2}+1 < 10$ であるから，$a_4 = -\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)-1$　　$\therefore \underline{a_4 = -\sqrt{2}-7}$ //

$a_4 = -\sqrt{2}-7 < 10$ であるから，$a_5 = -\sqrt{2}(-\sqrt{2}-7)-1$　　$\therefore \underline{a_5 = 7\sqrt{2}+1}$ //

(2) 数学的帰納法で示す

(i) $n=5$ のとき，

$1.4 < \sqrt{2}$ であるから，$a_5 > 7\times 1.4 + 1 = 10.8$　　$\therefore$ $n=5$ のとき成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する

このとき，$a_k > 10$ であるから，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (\sqrt{2}-1)a_k + 6 \\ &> 0.4\times 10 + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ．

(i)，(ii)より，$n \geqq 5$ のとき，$a_n > 10$ が成り立つ ■

(3) $n \geqq 5$ のとき，$a_{n+1} - 3(2+\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)\{a_n - 3(2+\sqrt{2})\} = (\sqrt{2}-1)^2\{a_{n-1} - 3(2+\sqrt{2})\}$

$= \quad \vdots$

$= (\sqrt{2}-1)^{n-4}\{a_5 - 3(2+\sqrt{2})\}$

$\therefore a_n - 3(2+\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)^{n-5}\{\underbrace{7\sqrt{2}+1}_{a_5} - 3(2+\sqrt{2})\}$

$\therefore \underline{a_n = (\sqrt{2}-1)^{n-5}\cdot(4\sqrt{2}-5) + 3\sqrt{2} + 6 \quad (n \geqq 5)}$ //　表し方は1通りではない．