2016年 第3問

$\boxed{3}$ a, bを実数とする．関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x + 2b$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$が単調に増加するとき，aについての条件を求めよ．

(2) $y = f(x)$のグラフがx軸と異なる3点で交わるための条件をaとbを用いて表せ．

(3) a, bが(2)で求めた条件をみたすとき，点(a, b)が存在する領域を座標平面上に図示せよ．

(1) $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$

$f(x)$：単調増加より．すべてのxについて．$f'(x) \geqq 0$ が成り立つ．

$\therefore\ -3a^2 \geqq 0 \qquad \therefore\ \underline{a = 0}$ //

(2) (1)より．$a \neq 0$のとき．$f(x)$は極値をもつ．

$f'(x) = 3(x-a)(x+a)$

$a > 0$のとき増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$a > 0$のとき．

$a < 0$のときも考えると．

x軸と異なる3点で交わる $\iff f(a)\cdot f(-a) < 0$

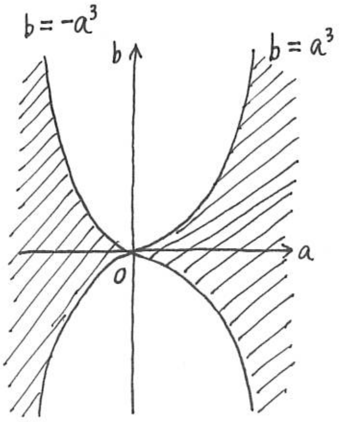
$\therefore\ f(a)\cdot f(-a) = (2b - 2a^3)(2b + 2a^3)$

$= 4(b - a^3)(b + a^3)$

$\therefore$ 求める条件は．$(b - a^3)(b + a^3) < 0$ かつ $a \neq 0$

すなわち．$\underline{a^3 < b < -a^3 \text{ または．} -a^3 < b < a^3}$ //

(3)



$\therefore$ (a, b)が存在する領域は左図の斜線部分

ただし境界線は含まない