

2016年 第5問

5 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法定理を用いて次の等式を示せ。

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

(2) 数学的帰納法によって、次の等式を証明せよ。

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \sum_{l=1}^n \cos l\theta = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \sin \frac{\theta}{2}$$

(3) m を整数とする。 $\theta \neq 2m\pi$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし、等号が成立する条件は調べなくてよい。

$$\left| \sum_{l=1}^n \cos l\theta \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|^{-1} \right)$$