2016年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 命題P「a $(0 \leqq a \leqq 2\pi)$ を定数としたとき，方程式 $x = \sin(x + a)$ はただ1つの実数解をもつ」が真であるとき，方程式 $x = \sin(x + a)$ の解 x を $f(a)$ で表わす．以下の問いに答えよ．

(1) 命題Pが真であることを示せ．

(2) $n = 0,\ 1,\ 2$ について，$f(n\pi)$ の値を求めよ．

(3) $0 < x < 2\pi$ のとき，$\cos(x + f(x)) < 1$ であることを示せ．

(4) 次の各問いに答えよ．ただし，関数 $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続，$0 < x < 2\pi$ で微分可能であると仮定してよい．

(i) 関数 $\theta(x) = x + f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において増加することを示せ．

(ii) 関数 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(iii) 曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(5) 導関数の定義と $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用することにより，関数 $f(x)$ が $0 < x < 2\pi$ において微分可能であることを示せ．ただし，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続であると仮定してよい．